



## المان محدود جدید صفحه با ضخامت متغیر

رضا عطارنژاد ، دانشیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

علیرضا فرساد ، کارشناس ارشد سازه - دانشکده فنی - دانشگاه تهران<sup>x</sup>

تلفن: ۰۲۱-۲۲۲۵۳۰۸۶ ، پست الکترونیکی: [alifarsad@yahoo.com](mailto:alifarsad@yahoo.com)<sup>x</sup>

### چکیده:

در این مقاله یک المان جدید به منظور تحلیل صفحات با ضخامت متغیر ارائه می شود. المان مذکور دارای تغییرات ضخامت در هر دو جهت المان و با تغییرات خطی، سهمی و یا درجه  $n$ ام می باشد. ابتدا توابع شکل تیرهای مقطع متغیر محاسبه می شود و سپس با استفاده از آن با بکارگیری یک ضریب اصلاحی، الگوی مناسب برای توابع شکل صفحات با ضخامت متغیر حاصل می شود که نهایتاً با استفاده از آن تمامی بردارها و ماتریسهای مربوطه از جمله ماتریس سختی و جرم و بردار بارگسترده قابل محاسبه اند. تئوری مورد بحث در اینجا تئوری تیرهای اویلر-برنولی می باشد. المان جدید نهایتاً با شبکه بندی های مختلف با المان زینکویچ-ملوش MZC در حالت مقطع ثابت و متغیر و همچنین نرم افزار اجزاء محدود تجاری ANSYS در حالت های مختلف شرایط مرزی تغییر مکان استاتیکی و فرکانسهای زاویه ای ارتعاش آزاد در حالت دینامیک مورد مقایسه قرار گرفت که در حالات گوناگون دارای سرعت همگرایی بیشتری نسبت به سه نوع المان مذکور نشان داد ضمن اینکه زمان مورد لزوم برای محاسبات اضافه برای ماتریسها و بردارهای مورد نیاز نسبت به حالت مقطع ثابت در مقایسه با زمان کل تحلیل بسیار ناچیز می باشد.

**کلید واژه:** المان محدود صفحه، ضخامت متغیر، توابع شکل تیرهای مقطع متغیر، ماتریس جرم و سختی

### مقدمه

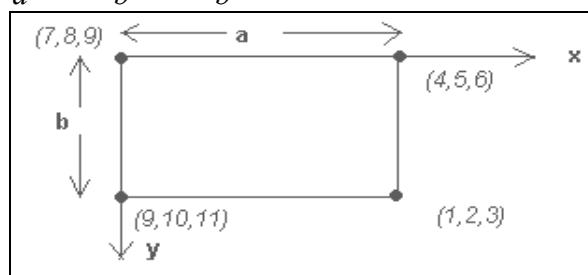
محاسبه با دقت مناسب ماتریسهای سختی و جرم و سختی هندسی یک صفحه با ضخامت متغیر به طور عمده به انتخاب مناسب توابع شکل برمی گردد. این توابع علاوه بر برقراری شرایط سازگاری، می بایست بطور نسبتاً خوبی تغییرشکلهای واقعی سازه مورد نظر که در اینجا ورق (صفحه) با ضخامت متغیر می باشد، بیان کنند. در اینجا پایه محاسبات اجزاء محدود براساس روشی که در اکثر کتب و مراجع ورق و پوسته اجزاء محدود مشاهده شد قرار می گیرد. در ابتدا روش یکی از مراجع توضیح داده می شود و در قسمت اصلی که برپایه توابع شکل مناسب تیرهاست توابع جدید (توابع شکل دقیق تیرهای مقطع متغیر) بکار گرفته می شود. توابع

شکل تیرها را می توان با ارتباط دادن به فیزیک مسئله توابع شکل صفحه به راحتی بصورت حاصلضرب دوتابع شکل تیر مربوط به درجه آزادی خاص بدست آورد که در قسمت محاسبه توابع شکل صفحه به آن اشاره خواهد شد سپس توابع شکل تیرهای مقطع متغیر محاسبه می شوند و نهایتاً ماتریسهای سختی و جرم و بردار بارگسترده محاسبه می گردند و بعد از محاسبه و بکارگیری ضریب اصلاحی که در تمام موارد و شدت های تغییرات آن بدون تغییر بکار گرفته خواهد شد و از حالت مقطع ثابت بدست می آید. در نهایت به مقایسه نتایج این المان با مراجع والمانهای موجود در ادبیات فنی پرداخته خواهد شد.

### محاسبه توابع شکل صفحه

ابتدا فرض می شود که هیچ نیروی داخل صفحه ای بوسیله تغییر مکان  $w(x, y)$  تولید نمی گردد. بنابراین برای حالت خمش صفحه هر گره دارای ۳ درجه آزادی سینماتیکی است یعنی یک تغییر مکان قائم و دو دوران حول محورهای مختصات. یک تابع سازگار ساده برای توابع شکل ، حاصلضرب توابع تیر مربوط به آن درجه آزادی است. بنابراین الگوی تغییر مکان یک المان در حالت مقطع ثابت در اثر تغییر مکان واحد در گره به مختصات  $(a, b)$  به عنوان مثال بصورت زیر می باشد [۱]:

$$w_1(x, y) = \left[3\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3\right] \left[3\left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{b}\right)^3\right] \quad (1)$$



شکل ۱: درجات آزادی المان (اعداد داخل پرانتز درجات آزادی مربوط به المان)

به همین صورت برای دوران حول محور  $y$  خواهیم داشت:

$$w_2(x, y) = \left[a\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right] \left[3\left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{b}\right)^3\right] \quad (2)$$

و بطور کلی برای تمام ۱۲ درجه آزادی ورق در خمش خالص داریم:

$$\begin{aligned}
 w_1(x, y) &= \varphi_1(x)\varphi_3(y) & w_7(x, y) &= \varphi_3(x)\varphi_1(y) \\
 w_2(x, y) &= \varphi_1(x)\varphi_4(y) & w_8(x, y) &= \varphi_3(x)\varphi_2(y) \\
 w_3(x, y) &= -\varphi_2(x)\varphi_3(y) & w_9(x, y) &= \varphi_4(x)\varphi_1(y) \\
 w_4(x, y) &= \varphi_3(x)\varphi_3(y) & w_{10}(x, y) &= \varphi_1(x)\varphi_1(y) \\
 w_5(x, y) &= \varphi_3(x)\varphi_4(y) & w_{11}(x, y) &= \varphi_1(x)\varphi_2(y) \\
 w_6(x, y) &= -\varphi_4(x)\varphi_3(y) & w_{12}(x, y) &= \varphi_2(x)\varphi_1(y)
 \end{aligned}
 \tag{۳}$$

که در عبارات بالا  $\varphi_i$  تابع شکل درجه آزادی  $i$ ام تیر بامقطع متغیر می باشد. به همین صورت الگوهای تغییر مکان مربوط به تمام ۱۲ درجه آزادی را بدست می آوریم و نهایتاً با داشتن آنها می توانیم با توجه به فرمولهای اجزاء محدود ماتریسهای مربوطه رابدست آوریم مثلاً ماتریس سختی به صورت زیر است:

$$K_{ij} = \int_0^a \int_0^b D \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dy dx \tag{۴}$$

بردار بار گسترده و ماتریسهای جرم و سختی هندسی هم به همین ترتیب محاسبه می شوند. نکته قابل توجه اینست که همانگونه که در مراجع ذکر شده است [۱] محاسبه به این روش نیازمند یک ضریب اصلاحی برای ماتریسهای سختی و جرم و بردار بار گسترده می باشد چون بدون آن حل به سمت جوابی همگرا می شود که با جواب دقیق ۴ تا ۵ درصد فاصله دارد بنابراین ما هم با توجه با مقدار ضریب حاصله از مقطع ثابت آن ضریب اصلاحی را برای مقطع متغیر خود نیز بکار می گیریم. نتایج رضایت بخشی هم از آن حاصل می شود که در بخش نتایج مشاهده می شود. در اینجا ما ضریب ۰،۹۷۳ برای ماتریس سختی و ۰،۹۹۸ برای بردار بار استفاده کردیم.

$$\begin{aligned}
 K_{used} &= 0.973 K_{calculated} \\
 F_{used} &= 0.998 F_{calculated}
 \end{aligned}
 \tag{۵}$$

### محاسبه توابع شکل تیرهای با مقطع متغیر

معادله عمومی این تیرها در حالت برنولی - اوپلر به صورت زیر است:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2}) = q(x) \tag{۶}$$

برای بدست آوردن توابع شکل حالت همگن معادله یعنی طرف راست را صفر قرار می دهیم:

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2}) = 0 \quad (7)$$

معادله را در حالتی که سختی به صورت زیر تعریف شود حل می کنیم (برای نمونه):

$$EI(x) = EI_0(1 + cx)^n \quad (8)$$

جواب عمومی معادله را به صورت زیر ساده نویسی می کنیم:

$$w(x) = P_1(x)C_1 + P_2(x)C_2 + P_3(x)C_3 + P_4(x)C_4 \quad (9)$$

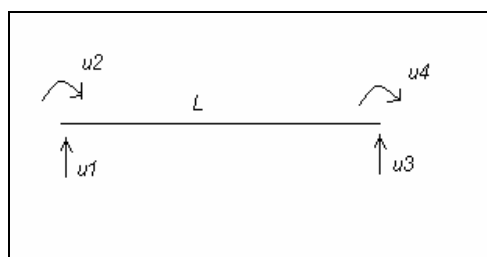
حال با قراردادن شرایط مرزی و تعریفی که برای توابع شکل داریم:

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 u_i \varphi_i(x) = \langle \varphi_i(x) \rangle_{1 \times 4} \{u\}_{4 \times 1} \quad (10)$$

$u_i$ : درجه آزادی  $i$  ام

$\varphi_i(x)$ : تابع شکل مربوط به درجه آزادی  $i$  ام

در شکل زیر درجات آزادی مشخص شده اند:



شکل ۲- درجات آزادی تیر

$$\{C\} = [A]^{-1} \{U\} \quad (11)$$

$$w(x) = \langle P(x) \rangle \{C\} \quad (12)$$

$$w(x) = \langle P(x) \rangle [A]^{-1} \{U\} \quad (13)$$

$$w(x) = \langle \Phi \rangle \{U\} \quad (14)$$

$$\langle \Phi \rangle = \langle P(x) \rangle [A]^{-1} \quad (15)$$

### مقایسه نتایج

برای مقایسه نتایج و میزان همگرایی روش مورد بحث یک صفحه مربع شکل با ضخامت متغیر و با تغییرات خطی در یک جهت  $t = t_0(1 + C_x \frac{x}{a})$  و با شدت تغییرات  $C_x$  برابر با ۱ و ۲ و ۴ تنها در یک جهت یعنی در جهت  $x$  یکبار برای بار متمرکز واحد در مرکز صفحه و یکبار هم برای بار گسترده یکنواخت واحد با المان جدید و المان ۴ گرهی زینکویچ ملوش [۲] و المان ۴ گرهی مقطع متغیر ANSYS المان Shell-63 [۳] در

چند حالت مش بندی شد و نتایج و خطاهای آنها در جداول ۱ تا ۶ و میزان همگرایی هریک از این روشها در شکلهای ۳ و ۴ و ۵ در چند حالت مقایسه شد. در اینجا خروجی مورد نظر تغییر مکان و دوران حول مورد بحث قرار گرفته است. در تمامی جداول و نمودارها مرجع جواب بدلیل عدم وجود مرجع قبلی در ادبیات فنی به ناچار ریزترین شبکه بندی در ANSYS بعنوان مرجع در نظر گرفته شده است. المانهای بکاررفته عبارتند از:

۱- المان پوسته مقطع متغیر چهارگره الاستیک (المان ۶۳) (*ANSYS-T*) ، ۲- المان پوسته "زینکویچ ملوش" مقطع ثابت (*MZC-U*) که برای بیان ضخامت متغیر مانند روش متداول در تیرهای مقطع متغیر تغییرات پله ای در طول شبکه لحاظ گردیده بطوریکه هر المان دارای مقطع ثابت است و در آن مقدار ضخامت برابر متوسط تغییرات ضخامت در ناحیه ای است که المان در آن قرار دارد ۳- المان زینکویچ مقطع متغیر (*MZC-T*) (در نقاط انتگرال گیری ضخامت متغیر و برابر با مقادیر واقعی)

**جدول ۱:** تغییر مکان مرکز صفحه چهارلبه گیردار تحت بار متمرکز واحد در مرکز صفحه ( $C_x = 1$ )

	<i>New Element</i>	%Error	<i>ANSYS(T)</i>	%Error	<i>MZC(U)</i>	%Error	<i>MZC(T)</i>	%Error
<b>2x2</b>	1.626E-03	<b>-2.9</b>	1.720E-03	<b>2.7</b>	1.760E-03	<b>5.1</b>	1.696E-03	<b>1.3</b>
<b>4x4</b>	1.608E-03	<b>-4.0</b>	1.768E-03	<b>5.5</b>	1.822E-03	<b>8.7</b>	1.817E-03	<b>8.5</b>
<b>6x6</b>	1.638E-03	<b>-2.2</b>	1.730E-03	<b>3.3</b>	1.758E-03	<b>5.0</b>	1.759E-03	<b>5.0</b>
<b>8x8</b>	1.654E-03	<b>-1.3</b>	1.710E-03	<b>2.1</b>	1.728E-03	<b>3.2</b>	1.729E-03	<b>3.2</b>
<b>10x10</b>	1.662E-03	<b>-0.8</b>	1.699E-03	<b>1.4</b>	1.712E-03	<b>2.2</b>	1.713E-03	<b>2.2</b>
<b>100x100</b>	-	-	1.675E-03	<b>0.0</b>	-	-	-	-

Reference= 1.675E-03

**جدول ۲:** دوران مرکز صفحه چهارلبه گیردار تحت بار متمرکز واحد در مرکز صفحه ( $C_x = 1$ )

	<i>New Element</i>	%Error	<i>ANSYS(T)</i>	%Error	<i>MZC(U)</i>	%Error	<i>MZC(T)</i>	%Error
<b>2x2</b>	1.632E-03	<b>-3.1</b>	1.831E-03	<b>8.7</b>	2.633E-03	<b>56.4</b>	1.867E-03	<b>10.9</b>
<b>4x4</b>	1.673E-03	<b>-0.6</b>	1.794E-03	<b>6.5</b>	2.331E-03	<b>38.4</b>	1.906E-03	<b>13.2</b>
<b>6x6</b>	1.684E-03	<b>0.0</b>	1.749E-03	<b>3.9</b>	2.043E-03	<b>21.3</b>	1.802E-03	<b>7.0</b>
<b>8x8</b>	1.687E-03	<b>0.2</b>	1.725E-03	<b>2.4</b>	1.915E-03	<b>13.7</b>	1.756E-03	<b>4.3</b>
<b>10x10</b>	1.688E-03	<b>0.3</b>	1.712E-03	<b>1.7</b>	1.845E-03	<b>9.6</b>	1.733E-03	<b>2.9</b>
<b>100x100</b>	-	-	1.684E-03	<b>0.0</b>	-	-	-	-

Reference= 1.684E-03

دول ۳: تغییر مکان مرکز صفحه چهارلبه گیردار تحت بار گسترده یکنواخت ( $C_x = 1$ )

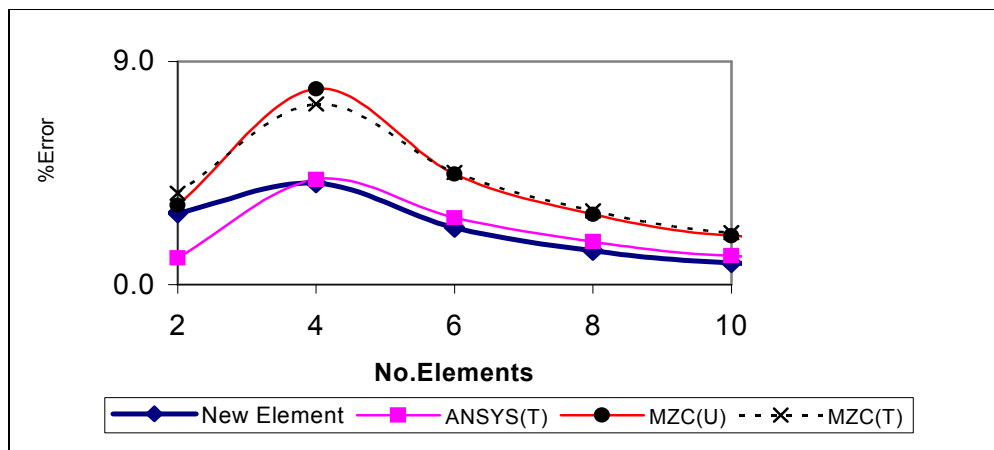
	New Element	%Error	ANSYS(T)	%Error	MZC(U)	%Error	MZC(T)	%Error
2x2	4.176E-04	7.4	4.301E-04	10.6	4.401E-04	13.2	4.241E-04	9.1
4x4	3.814E-04	-1.9	4.142E-04	6.5	4.236E-04	8.9	4.264E-04	9.7
6x6	3.842E-04	-1.2	4.133E-04	6.3	4.054E-04	4.3	4.078E-04	4.9
8x8	3.862E-04	-0.7	3.958E-04	1.8	3.983E-04	2.4	3.999E-04	2.8
10x10	3.873E-04	-0.4	3.933E-04	1.2	3.949E-04	1.6	3.960E-04	1.8
100x100	-	-	3.888E-04	0.0	-	-	-	-

Reference= 3.888E-04

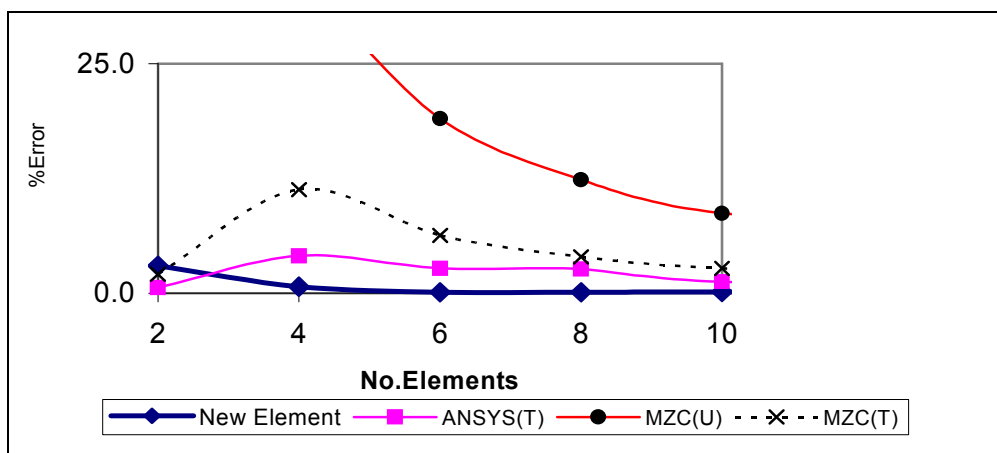
جدول ۴: تغییر مکان مرکز صفحه چهارلبه گیردار تحت بار گسترده یکنواخت ( $C_x = 2$ )

	New Element	%Error	ANSYS(T)	%Error	MZC(U)	%Error	MZC(T)	%Error
2x2	1.853E-04	7.5	1.765E-04	2.3	1.841E-04	6.8	1.718E-04	-0.3
4x4	1.689E-04	-2.0	1.800E-04	4.4	1.833E-04	6.3	1.855E-04	7.6
6x6	1.702E-04	-1.3	1.764E-04	2.3	1.772E-04	2.8	1.796E-04	4.2
8x8	1.711E-04	-0.8	1.747E-04	1.3	1.750E-04	1.5	1.768E-04	2.5
10x10	1.716E-04	-0.5	1.738E-04	0.8	1.740E-04	0.9	1.753E-04	1.7
100x100	-	-	1.724E-04	0.0	-	-	-	-

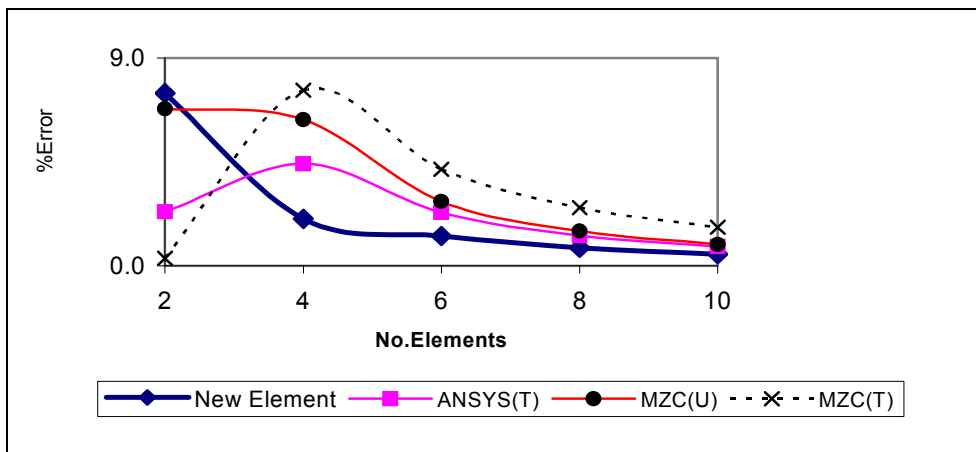
Reference= 1.724E-04



شکل ۳: همگرایی تغییر مکان مرکز صفحه چهارلبه گیردار تحت بار متمرکز در مرکز صفحه  $C_x = 2$



شکل ۴: همگرایی دوران مرکز صفحه چهارلبه گیردار تحت بار متمرکز در مرکز صفحه  $C_x = 2$



شکل ۵: همگرایی تغییر مکان مرکز صفحه چهارلبه گیردار تحت بار گسترده یکنواخت  $C_x = 2$

جدول ۵: فرکانس ارتعاش آزاد ۳ مود اول و درصد خطا ورق مربع با ضخامت متغیر  $t = t_0(1 + \frac{x}{a})$

#### المان جدید

شبه بندی	$\Omega_1$	درصد خطا	$\Omega_2$	درصد خطا	$\Omega_3$	درصد خطا	$\Omega_4$	درصد خطا
2x2	26.810	2.0	68.185	28.6	69.319	29.3	-	-
4x4	26.518	0.9	53.647	1.1	54.237	1.2	81.251	2.2
6x6	26.429	0.5	53.388	0.7	53.949	0.6	81.011	1.9
8x8	26.360	0.3	53.218	0.3	53.774	0.3	80.658	1.5
10x10	26.321	0.1	53.114	0.1	53.672	0.1	80.394	1.2

#### المان مقطع ثابت MZC

شبه بندی	$\Omega_1$	درصد خطا	$\Omega_2$	درصد خطا	$\Omega_3$	درصد خطا	$\Omega_4$	درصد خطا
2x2	26.550	1.0	68.325	28.8	68.368	27.5	-	-
4x4	25.392	-3.4	51.187	-3.5	51.513	-3.9	73.066	-8.1
6x6	25.809	-1.8	51.731	-2.5	52.364	-2.3	74.953	-5.7
8x8	26.002	-1.1	52.196	-1.6	52.838	-1.5	76.532	-3.7
10x10	26.100	-0.7	52.466	-1.1	53.100	-1.0	77.463	-2.5

#### ANSYS Shell-63

شبه بندی	$\Omega_1$	درصد خطا	$\Omega_2$	درصد خطا	$\Omega_3$	درصد خطا	$\Omega_4$	درصد خطا
2x2	24.901	-5.3	63.872	20.4	64.038	19.4	-	-
4x4	25.526	-2.9	50.914	-4.1	51.621	-3.8	73.768	-7.2
6x6	25.887	-1.5	51.844	-2.3	52.485	-2.2	76.284	-4.0
8x8	26.052	-0.9	52.300	-1.4	52.920	-1.3	77.457	-2.6
10x10	26.134	-0.6	52.546	-0.9	53.159	-0.9	78.113	-1.7

## نتیجه گیری

المان محدود جدیدی که در این مقاله مورد بحث قرار گرفت با توجه به نتایج و نمودار هائی که در بخش نتایج ملاحظه شد دارای دقت و سرعت همگرایی بسیار خوبی نسبت به دو المان مقطع متغیر موجود در ادبیات فنی یعنی  $MZC(Tap)$  و  $ANSYS(Tap)$  نشان داد. المان مورد بحث قابلیت تغییرات ضخامت در هر دو جهت المان را داراست. این المان قابلیت پذیرش هر نوع تغییراتی از قبیل خطی و سهمی و تابع درجه  $n$  ام را دارد که مزیت بزرگی نسبت به المان  $ANSYS(Tap)$  دارد که تنها تغییرات خطی می پذیرد. المان  $MZC(Tap)$  قابلیت پذیرش هر نوع تغییرات ضخامت داراست ولی همانگونه که ملاحظه شد دقت و سرعت همگرایی بسیار کمی نسبت به دو المان دیگر دارد. از لحاظ سرعت محاسبات هم زمان برای محاسبات اضافه برای محاسبه ماتریسهای جرم و سختی حدود ۲۰ تا ۳۰ درصد بیشتر از حالت مقطع ثابت می باشد که با توجه به اینکه زمان اختصاص یافته برای محاسبه ماتریس های سختی و جرم تنها حدود ۵ تا ۱۰ درصد از کل زمان اجرای برنامه که شامل حل دستگاه معادلات و یا در تحلیل دینامیکی محاسبه مقادیر ویژه است کاملاً ناچیز می باشد [۵].

## مراجع

- 1- Szilard R. (1974) "Theory and analysis of plates: Classical and numerical methods", Prentice-Hall Inc.
- 2- Weaver W. and Johnston P.R., *Finite element for structural analysis*, Prentice-Hall Inc.
- 3- ANSYS 5.6 Elements and Theory Reference . SAS IP, Inc.
- 4- Zhou D, Cheung YK (2000) "The free vibration of a type of tapered beams" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol.188 (1-3) pp203-16.
- ۵- ع. فرساد "تحلیل پوسته های با ضخامت متغیر و کاربرد آن در سازه های خاص" رساله کارشناسی ارشد، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، شهریور ۱۳۸۲
- ۶- ر. عطارنژاد، ع. فرساد "تحلیل استاتیکی و دینامیکی صفحات مستطیلی با ضخامت متغیر به روش ریتز با استفاده از مودهای تیرهای مقطع متغیر" اولین کنگره ملی مهندسی عمران، کد ۱۶۲۰، دانشگاه صنعتی شریف، اردیبهشت ۱۳۸۲
- ۷- ر. عطارنژاد، ع. فرساد، "المان محدود جدید برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیرهای با مقطع متغیر" اولین کنگره ملی مهندسی عمران، کد ۱۶۲۴، دانشگاه صنعتی شریف، اردیبهشت ۱۳۸۲
- ۸- ع. فرساد، ن. معنوی "تحلیل دقیق ارتعاش آزاد تیر با مقطع متغیر و تکیه گاه الاستیک" دومین کنگره ملی مهندسی عمران، کد ۶۱۴، دانشگاه علم و صنعت، اردیبهشت ۱۳۸۳